SOAL-JAWAB MATEMATIKA PEMINATAN

LIMIT TRIGONOMETRI

Soal 1

$$\lim_{x\to 0} \frac{(\sin 3x)(\tan 4x)(\cos 3x)}{5x^2} = ...$$

Jawab:

Gunakan rumus dasar limit trigonometri berikut:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin ax}{bx} = \lim_{x\to 0} \frac{\tan ax}{bx} = \frac{a}{b}$$

Perhatikan pada rumus di atas, hanya berlaku pada fungsi sin, tan dan linier (x), tidak ada cos nya!

Kembali pada soal, kita pecah $5x^2$ menjadi $5x.x$, lalu dipasangkan dengan sin 3x dan tan 4x.

$$\lim_{x\to 0} \frac{(\sin 3x)(\tan 4x)(\cos 3x)}{5x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{5x} . \frac{\tan 4x}{x} . \cos 3x$$

$$= \frac{3}{5} . \frac{4}{1} . \cos 0 = \frac{3}{5} . \frac{4}{1} . 1 = \frac{12}{5}$$

Soal 2

$$\lim_{x\to 0} \frac{2\cos 3x - 2}{\sin^2 4x} = ...$$

Jawab:

Untuk limit fungsi trigonometri yang mengandung fungsi cos, cobain deh rumus yang mahsyur ini:

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha$$

Ambil $\alpha = \frac{3}{2}x$, masukkan ke rumus:

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha$$

$$\rightarrow \cos 2(\tfrac{3}{2}x) = 1 - 2\sin^2(\tfrac{3}{2}x)$$

$$\rightarrow \cos 3x = 1 - 2\sin^2(\tfrac{3}{2}x)$$

Sehingga $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2\cos 3x - 2}{\sin^2 4x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2(1 - 2\sin^2(\frac{3}{2}x)) - 2}{\sin^2 4x}$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\cancel{2} - 4\sin^2(\frac{3}{2}x) \cancel{-2}}{\sin^2 4x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{-4\sin(\frac{3}{2}x) \cdot \sin(\frac{3}{2}x)}{\sin 4x \cdot \sin 4x}$$

$$= \frac{-4 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2}}{4 \cdot 4} = -\frac{9}{16}.$$

(Di atas kita gunakan rumuz $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin ax}{\sin bx} = \dfrac{a}{b}$)

Soal 3

$$\lim_{x \to y} \frac{\sin x - \sin y}{\cos x - \cos y} = \ldots.$$

Jawab:

Perhatikan pada soal**, *x* adalah variabel** sedangkan ***y* adalah konstanta** (nilai) yang dituju oleh variabel *x*.

Gunakan rumus trigonometri menawan berikut ini:

$$\sin x - \sin y = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\cos x - \cos y = -2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

Sehingga $\displaystyle \lim_{x\to y}\frac{\sin x-\sin y}{\cos x-\cos y}=\lim_{x\to y}\frac{\cancel{2}\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cancel{\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)}}{-\cancel{2}\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cancel{\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)}}$

$$=\lim_{x\to y}-\frac{\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)}$$

$$=\lim_{x\to y}-\cot\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

$$=-\cot\left(\frac{y+y}{2}\right)$$ (masukkan $x = y$)

$$=-\cot(y)$$

CARA LAIN:

Jika Anda sudah belajar turunan (apaan tuh?), Anda bisa gunakan teorema l'Hopital

$\displaystyle \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$. (dengan syarat bentuknya $\frac{0}{0}$)

Turunan fungsi $f(x)=\sin x$ adalah $f'(x)=\cos x$

$g(x)=\cos x$ adalah $g'(x)=-\sin x$

Jadi,

$$\lim_{x\to y}\frac{\sin x-\sin y}{\cos x-\cos y}=\lim_{x\to y}\frac{\cos x}{-\sin x}=\lim_{x\to y}-\cot x=-\cot y.$$

(Perhatikan pula turunan dari sin *y* maupun cos *y* adalah 0 (nol) karena keduanya adalah konstanta dalam *y*, bukan fungsi dari variabel *x*)

Tahukah Anda?

Soal Matematika ada 2 macam:

1. Soal yang singkat, mudah dan simpel.

2. Soal yang **mengasyikkan** ...

Soal 4

$$\lim_{x\to 2}\frac{1-\cos(x-2)}{(4-2x)^2}=....$$

Jawab:

Untuk bentuk $\cos(x-2)$, kita gunakan rumus yang mahsyur : $\cos 2\alpha = 1-2\sin^2\alpha$,

dengan memasang $\alpha = \frac{(x-2)}{2}$, sehingga menjadi $\cos(x-2)=1-2\sin^2\left(\frac{x-2}{2}\right)$.

Sehingga,

$$\lim_{x\to 2}\frac{1-\cos(x-2)}{(4-2x)^2}=\lim_{x\to 2}\frac{1-\{1-2\sin^2\left(\frac{x-2}{2}\right)\}}{(4-2x)^2}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{2\sin^2\left(\frac{x-2}{2}\right)}{(4-2x)^2}.$$

Perhatikanlah pada bentuk limit, x menuju 2 (yakni $x\to 2$). Kita ganti variabel x dengan variabel lain yang menuju 0 (nol).

Misalkan $p = x-2$, maka $x = p+2$

Jika $x\to 2$ maka jelas $p\to 0$.

Pada bagian penyebut, perhatikan bahwa

$$(4-2x)^2=(4-2(p+2))^2=(\cancel{4}-2p-\cancel{4})^2=(-2p)^2=4p^2$$

Sehingga bentuk limit pada soal menjadi:

$$\lim_{x\to 2}\frac{2\sin^2\left(\frac{x-2}{2}\right)}{(2-x)(2+x)}=\lim_{p\to 0}\frac{2\sin^2\left(\frac{p}{2}\right)}{4p^2}=\lim_{p\to 0}\frac{2}{4}\cdot\frac{\sin\left(\frac{p}{2}\right)}{p}\cdot\frac{\sin\left(\frac{p}{2}\right)}{p}$$

$$=\frac{2}{4}\cdot\frac{\left(\frac{1}{2}\right)}{1}\cdot\frac{\left(\frac{1}{2}\right)}{1}$$

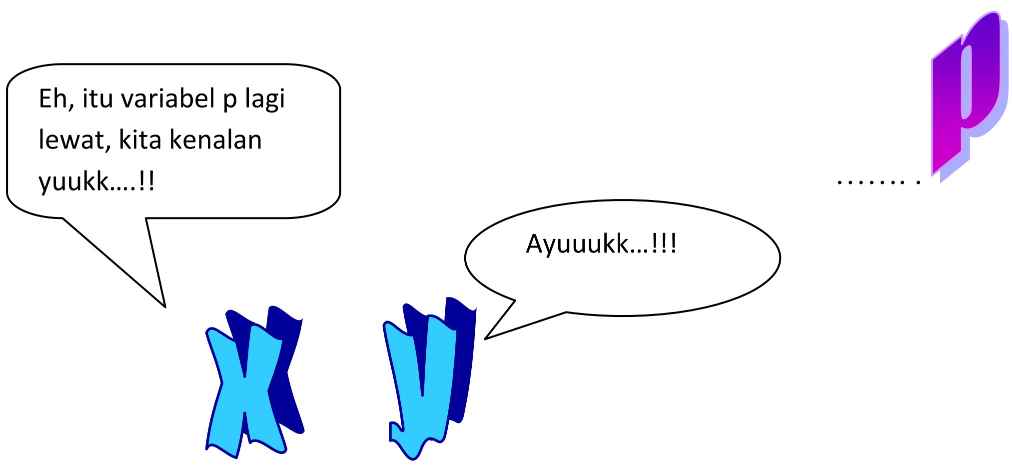
$$=\frac{1}{8}.$$

Soal 5

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{6}} \frac{2\sin x - 1}{\left(x - \frac{\pi}{6}\right)} = ...$$

Jawab:

Perhatikan bahwa pada limit variabel x menuju $\frac{\pi}{6}$. Kita perkenalkan variabel lain yang menuju 0 (nol). Yaitu kita perkenalkan variabel $p = x - \frac{\pi}{6}$.



Karena $p = x - \frac{\pi}{6}$, maka $x = p + \frac{\pi}{6}$

Perhatikan jika $x \to \frac{\pi}{6}$ maka $p \to 0$.

Maka $\lim_{x \to \frac{\pi}{6}} \frac{2\sin x - 1}{\left(x - \frac{\pi}{6}\right)} = \lim_{p \to 0} \frac{2\sin\left(p + \frac{\pi}{6}\right) - 1}{p}$

$$= \lim_{p \to 0} \frac{2\{\sin p.\cos\frac{\pi}{6} + \cos p.\sin\frac{\pi}{6}\} - 1}{p}$$

$$= \lim_{p \to 0} \frac{2\{\sin p.\frac{1}{2}\sqrt{3} + \cos p.\frac{1}{2}\} - 1}{p}$$

$$= \lim_{p \to 0} \frac{\sqrt{3}\sin p + \cos(p) - 1}{p}$$

$$= \lim_{p\to 0} \frac{\sqrt{3}\sin p}{p} + \lim_{p\to 0} \frac{\cos(p)-1}{p}$$

$$= \sqrt{3}.\frac{1}{1} + \lim_{p\to 0} \frac{\cancel{1} - 2\sin^2(\frac{1}{2}p) - \cancel{1}}{p}$$

$$= \sqrt{3} + \lim_{p\to 0} \frac{-2\sin(\frac{1}{2}p)}{p}.\sin(\frac{1}{2}p)$$

$$= \sqrt{3} + \frac{-2.(\frac{1}{2})}{1}.\sin(0)$$

$$= \sqrt{3} + 0$$

$$= \sqrt{3}$$

CARA LAIN:

Jika Anda sudah belajar turunan, gunakan teorema l'Hopital:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \quad \text{(dengan syarat bentuknya } \frac{0}{0}\text{)}$$

Turunan fungsi $f(x) = 2\sin x - 1$ adalah $f'(x) = 2\cos x$

sedangkan turunan fungsi $g(x) = \left(x - \frac{\pi}{6}\right)$ adalah $g'(x) = 1$.

Sehingga, $\lim_{x\to\frac{\pi}{6}} \frac{2\sin x - 1}{\left(x - \frac{\pi}{6}\right)} = \lim_{x\to\frac{\pi}{6}} \frac{2\cos x}{1} = 2\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2\cos\left(\frac{180^\circ}{6}\right)$

$$= 2\cos(30^\circ) = 2\cdot\tfrac{1}{2}\sqrt{3} = \sqrt{3}.$$

SOAL 6

Jika $\underset{x\to 0}{Lim} \frac{2a - \cos x}{3bx^2} = 4$, maka nilai $a + b = \ldots.$

Jawab:

Coba masukkan $x = 0$, maka $\frac{2a-\cos x}{3bx^2} = \frac{2a-\cos 0}{3b.0^2} = \frac{2a-1}{0}$.

Karena $\lim\limits_{x\to 0} \frac{2a-\cos x}{3bx^2} = 4$, maka

$$\frac{2a-1}{0} = 4.$$

Hal ini mengharuskan $2a-1=0$ sehingga bentuknya menjadi $\frac{0}{0}$.

(Jika $2a-1 \neq 0$ maka $\frac{2a-1}{0} = \infty$. Kontradiksi dengan $\frac{2a-1}{0} = 4$. Sedangkan jika $2a-1=0$, maka persamaan $\frac{0}{0} = 4$ masih memungkinkan).

Jadi,

$$2a-1=0$$
$$a = \frac{1}{2}$$

Masukkan $a = \frac{1}{2}$ ke dalam limit, maka:

$$\lim_{x\to 0} \frac{2a-\cos x}{3bx^2} = 4$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{3bx^2} = 4$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos 2(\frac{1}{2}x)}{3bx^2} = 4$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-(1-2\sin^2(\frac{1}{2}x))}{3bx^2} = 4$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{2\sin^2(\frac{1}{2}x)}{3bx^2} = 4$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{2\sin(\frac{1}{2}x)\sin(\frac{1}{2}x)}{3bx \cdot x} = 4$$

$$\frac{2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}{3b\cdot 1\cdot 1} = 4$$

$$\tfrac{1}{2} = 12b$$

$$\tfrac{1}{24} = b$$

Jadi, $a+b = \frac{1}{2}+\frac{1}{24} = \frac{12}{24}+\frac{1}{24} = \frac{13}{24}$.

SOAL 7

$$\lim_{h\to 0}\frac{\tan(t+h)-\tan t}{h}=....$$

Jawab:

Cermati, di sini *h* adalah variabel, sedangkan *t* adalah konstanta.

Gunakan rumus yang tertera pada papan pengumuman!

PENGUMUMAN!

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\cdot\tan\beta}$$

Maka

$$\lim_{h\to 0}\frac{\tan(t+h)-\tan t}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\left(\frac{\tan t+\tan h}{1-\tan t\tan h}\right)-\tan t}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\left(\frac{\tan t+\tan h}{1-\tan t\tan h}\right)-\frac{\tan t\,(1-\tan t\tan h)}{(1-\tan t\tan h)}}{h}$$

(samakan penyebut)

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{\tan t+\tan h-\tan t\,(1-\tan t\tan h)}{(1-\tan t\tan h)}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{\tan t}+\tan h-\cancel{\tan t}+\tan^2 t\tan h}{h\,(1-\tan t\tan h)}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\tan h\,(1+\tan^2 t)}{h\,(1-\tan t\tan h)}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\tan h}{h}.\lim_{h\to 0}\frac{(1+\tan^2 t)}{(1-\tan t\tan h)}$$

$$=\frac{1}{1}.\frac{(1+\tan^2 t)}{(1-0)}\quad=1+\tan^2 t=\sec^2 t\,.$$

CARA CEPAT:

Gunakan definisi turunan

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x)$$

Pada soal, x = t dan f(x) = tan x, sehingga:

$$\lim_{h\to 0} \frac{\tan(t+h)-\tan t}{h} = \{\textit{\textbf{Turunan dari fungsi f(t) = tan t}}\}$$

$$= \sec^2 t$$

(Bagi yang sudah belajar, ingatlah turunan fungsi tan x adalah $\sec^2 x$)

SOAL 8

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{cosec} x \cdot \sec 2x}{\cot 3x} = ...$$

Jawab:

Ingatlah $\operatorname{cosec} = \frac{1}{\sin}$, $\sec = \frac{1}{\cos}$, dan $\cot = \frac{1}{\tan}$.

Jadi, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{cosec} x \cdot \sec 2x}{\cot 3x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\sin x} \cdot \frac{1}{\cos 2x}}{\frac{1}{\tan 3x}}$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\tan 3x}{\sin x \cdot \cos 2x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\tan 3x}{\sin x} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos 2x} = \frac{3}{1} \cdot \frac{1}{\cos 0} = 3 \cdot \frac{1}{1} = 3$$

Ternyata ….

Memecahkan soal limit trigonometri masih lebih mudah daripada memotong batu karang dengan gergaji!!

SOAL 9

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right)=....$$

Jawab:

Samakan penyebut,

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x - x}{x\sin x}\right)$$

Lalu gunakan teorema l'Hopital dengan turunan!

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{1\cdot\sin x+x\cdot\cos x}$$

(perhatikan untuk menurunkan *x* sin *x*, gunakan turunan dari *u.v* yaitu *u'v+uv'*)

Kalau kita masukkan *x* = 0, ke fungsinya maka kita masih dapatkan bentuk $\frac{0}{0}$. Karena itu,

kita turunkan sekali lagi yuuk…!!

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{\cos x+\cos x+x(-\sin x)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{2\cos x - x\sin x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{0}{2-0}=0.$$

SOAL 10

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos 6x-\cos 2x}{\sin 2x+\sin x}=....$$

Jawab:

Masih ingatkah Anda dengan rumus: $\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$?

Gunakan rumus ini!

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos 6x-\cos 2x}{\sin 2x+\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin\left(\frac{8x}{2}\right)\sin\left(\frac{4x}{2}\right)}{\sin 2x+\sin x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin(4x)\sin(2x)}{\sin 2x+\sin x}$$

Bagi pembilang dan penyebut dengan *x*, sehingga menjadi:

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{-2\sin(4x)\sin(2x)}{x}}{\dfrac{\sin 2x + \sin x}{x}}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-2\dfrac{\sin(4x)}{x}\sin(2x)}{\dfrac{\sin 2x}{x} + \dfrac{\sin x}{x}}$$

$$= \frac{-2\cdot\dfrac{4}{1}\cdot\sin(0)}{\dfrac{2}{1}+\dfrac{1}{1}} = \frac{0}{3} = 0.$$

Mau cara lain? Coba deh pakai teorema l'Hopital! Bisa nggak ya..?